电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

时序模型中的推理
--卡尔曼滤波

Heng Zhang

Data Mining Lab, Big Data Research Center, UESTC
Email：junmshao@uestc.edu.cn
http://staff.uestc.edu.cn/shaojunming

Outline

1. 推理
2. 卡尔曼滤波

时序上的推理

团树

贝叶斯网的时序形式

粒子滤波（12章的采样算法）

卡尔曼滤波及扩展

卡尔曼滤波

数据挖掘实验室
Data Mining Lab

优点：

- 最佳线性滤波器，实现简单
- 纯时域滤波器，不需要进行频域变换
- 对现代控制工程贡献极大，尤其是导航领域

卡尔曼滤波

路上有一辆汽车：

状态 $x_t = \begin{bmatrix} p_t \\ v_t \end{bmatrix}$

由上一时刻的状态->这一时刻的状态：

$$p_t = p_{t-1} + v_{t-1} \times \Delta t + u_t \times \frac{\Delta t^2}{2}$$

$$v_t = v_{t-1} + u_t \times \Delta t$$

$$\begin{bmatrix} p_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{t-1} \\ v_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix} u_t$$

$$F_t = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_t = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix}$$

F_t ： 状态转移矩阵

B_t ： 控制矩阵

公式1：状态预测公式

$$\hat{x}_t^- = F_t \hat{x}_{t-1} + B_t u_t$$

噪声协方差矩阵的传递

数据挖掘实验室
Data Mining Lab

然而，所有的预测都是包含噪声的，卡尔曼滤波假设噪声服从高斯分布，噪声的协方差矩阵 P 通过转移矩阵 F 在时刻之间传递：

$$P_t^- = FP_{t-1}F^T$$

还要考虑到预测模型并不是100%准确的，还要加上一个协方差矩阵 Q 来表示预测模型本身带来的噪声：

$$P_t^- = FP_{t-1}F^T + Q$$

公式2：不确定性在各时刻之间的传递关系

观测矩阵

回到小汽车的模型，假设在公路的另一端有一个激光测距仪，其观测值为 Z_t：

观测值与预测值之间的转换：

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_t = Hx_t + \boxed{v}$$

v : 观测值也并不是100%准确的

同样的观测值也是包含噪声的，在卡尔曼滤波中同样假设观测值的噪声服从高斯分布其协方差矩阵 *R*

状态更新

数据挖掘实验室
Data Mining Lab
LESS IS MORE

公式3：将观测值与估计值融合得到最佳估计值

如何将观测值与预测值进行融合？

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t\boxed{(z_t - H\hat{x}_t^-)}$$

实际的观测值与预期的观测值之间的残差

K_t：卡尔曼系数（很重要）

- 权衡预测状态的协方差与观测值的协方差之间的关系，来决定相信预测模型多一点还是相信观测模型多一点
- 将残差的表现形式从观测域变换到状态域

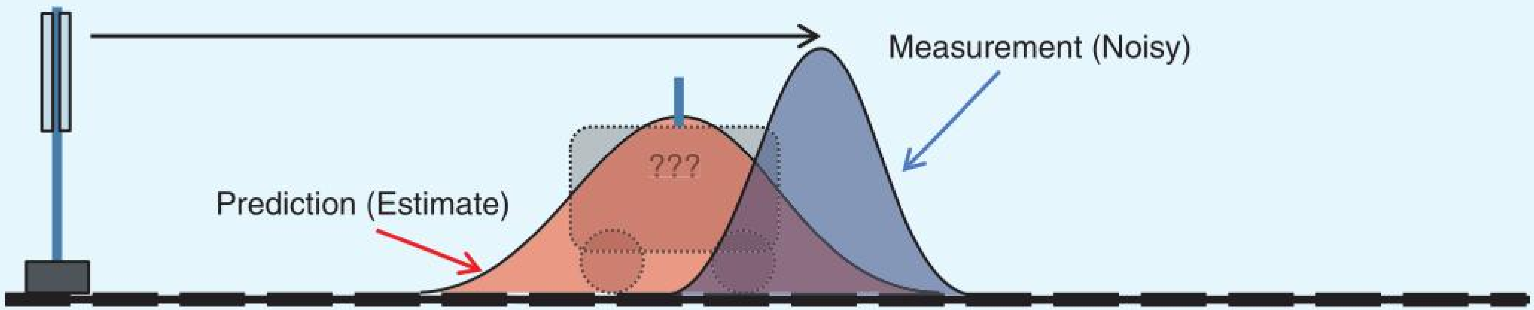
公式4：卡尔曼系数

$$K_t = P_t^- H^T \left(HP_t^- H^T + R\right)^{-1}$$

卡尔曼系数

$$y_1(r;\mu_1,\sigma_1) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(r-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$

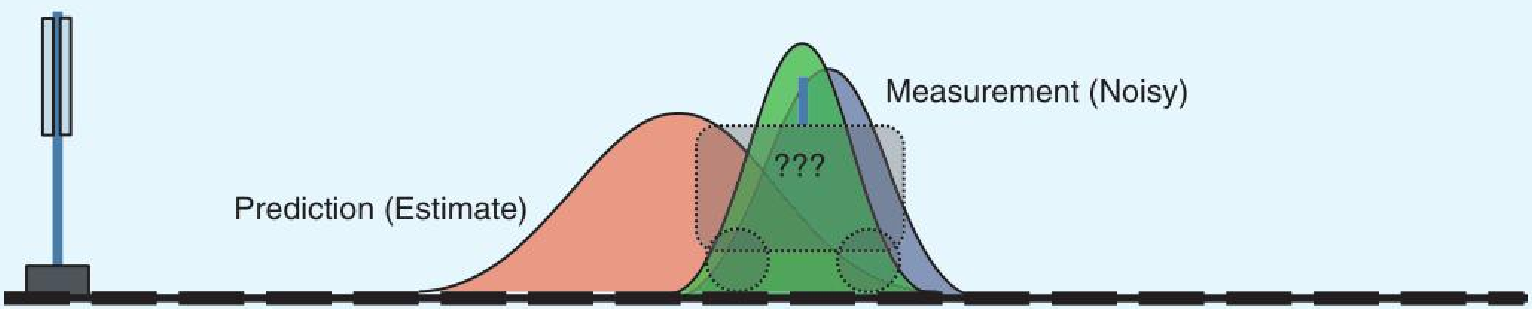
$$y_2(r;\mu_2,\sigma_2) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(r-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$



$$y_{\text{fused}}(r;\mu_1,\sigma_1,\mu_2,\sigma_2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(r-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(r-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} e^{-\left(\frac{(r-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(r-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}.$$



卡尔曼系数

融合后：

$$\mu_{\text{fused}} = \frac{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \mu_1 + \frac{\sigma_1^2(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$\sigma_{\text{fused}}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sigma_1^2 - \frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

融合后：

$$\sigma_{fused}^2 = \sigma_1^2 H^2 - \left(\frac{\sigma_1^4 H^4}{\sigma_1^2 H^2 + \sigma_2^2}\right) \rightarrow \sigma_1^2 - \left(\boxed{\frac{\sigma_1^2 H}{\sigma_1^2 H^2 + \sigma_2^2}}\right)\sigma_1^2 H$$

$$\rightarrow \sigma_1^2 - KH\sigma_1^2$$

$$K_t = P_t^- H^T \left(HP_t^- H^T + R\right)^{-1}$$

更新状态

最后一个公式：

公式5：更新最佳估计值的噪声分布

$$P_t = (I - K_t H) P_t^-$$

作用：

- 留给下一轮迭代时用的
- 通过本轮融合状态值的噪声不断较小在下一轮迭代中由于新的预测噪声的引入不确定性又会增大
- 卡尔曼滤波就是在这种不确定性的变化中逐渐收敛

卡尔曼滤波

完整的五个公式：

预测

$$\hat{x}_t^- = F\hat{x}_{t-1} + Bu_{t-1}$$

$$P_t^- = FP_{t-1}F^T + Q$$

更新

$$K_t = P_t^- H^T \left(HP_t^- H^T + R\right)^{-1}$$

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t(z_t - H\hat{x}_t^-)$$

$$P_t = (I - K_t H)P_t^-$$

通过上一时刻的状态来预测当前时刻的状态（先验）

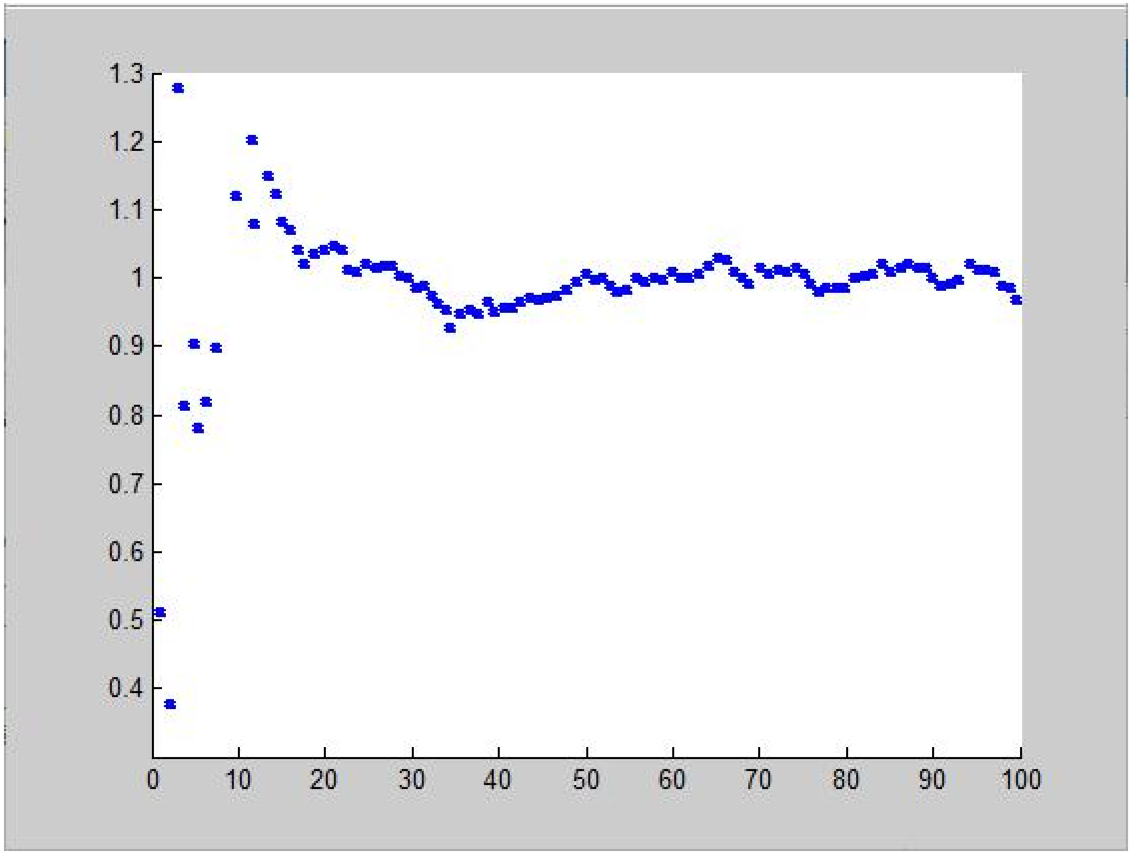
后三个公式通过观测值来更新 *x* 和 *P*，经过更新后的值就是最佳预测值。

小车DEMO


```
Z=(1:100); %观测值
noise=randn(1,100); %方差为1的高斯噪声
Z=Z+noise;

X=[0; 0]; %状态
P=[1 0; 0 1]; %状态协方差矩阵
F=[1 1; 0 1]; %状态转移矩阵
Q=[0.0001, 0; 0 0.0001]; %状态转移协方差矩阵
H=[1 0]; %观测矩阵
R=1; %观测噪声方差

figure;
hold on;

for i=1:100

  X_ = F*X;
  P_ = F*P*F'+Q;
  K = P_*H'/(H*P_*H'+R);
  X = X_+K*(Z(i)-H*X_);
  P = (eye(2)-K*H)*P_;

  plot(X(1), X(2)); %画点，横轴表示位置，纵轴表示速度
end
```

小车DEMO

小车速度的迭代过程：



Thanks

Heng Zhang
hengzhang64@gmail.com